

1 Résolution d'équations différentielles linéaire du premier ordre

Exercice 1 ★ Problème de Cauchy (premier ordre à coefficients constants) –

1. Déterminer la solution de $y' + 2y = -4$, $y(1) = -3$.
2. Déterminer la solution de $2y' - 3y = 9$, $y(-1) = 1$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3133]

Exercice 2 ★ Premier ordre –

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $7y' + 2y = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$;
2. $y' + 2y = x^2 - 2x + 3$;
3. $y' + y = xe^{-x}$;
4. $y' - 2y = \cos(x) + 2\sin(x)$;

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[254]

Exercice 3 ★ Premier ordre avec second membre simple –

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + x^2y = -x^2$ sur \mathbb{R} ;
2. $2xy' - y = x$ sur \mathbb{R}_+^* ;
3. $y' - \frac{x}{1+x^2}y = \frac{1}{1+x^2}$ sur \mathbb{R} .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3157]

Exercice 4 ★ Varions la constante... –

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$ sur \mathbb{R} ;
2. $(1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x)$ sur $] -1, +\infty[$;
3. $y' - \frac{y}{x} = x^2$ sur $]0, +\infty[$;
4. $y' - 2xy = -(2x-1)e^x$ sur \mathbb{R} ;
5. $y' - \frac{2}{t}y = t^2$ sur $]0, +\infty[$;

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[255]

Exercice 5 ★★ Problème inverse –

Donner une équation différentielle dont les solutions sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{C+x}{1+x^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[257]

Exercice 6 ★★ Raccordement détaillé –

1. Soient $C, D \in \mathbb{R}$. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par

$$f(x) = \begin{cases} C \exp\left(\frac{-1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ D \exp\left(\frac{-1}{x}\right) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur C et D pour que f se prolonge par continuité en 0. Démontrer que si cette condition est remplie, ce prolongement, toujours noté f , est alors dérivable en 0 et que f' est continue en 0.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur C et D pour que f se prolonge par continuité en 0.
3. Démontrer que si cette condition est remplie, ce prolongement, toujours noté f , est alors dérivable en 0 et que f' est continue en 0.
4. On considère l'équation différentielle

$$x^2 y' - y = 0.$$

Résoudre cette équation sur les intervalles $]0, +\infty[$ et $] -\infty, 0[$.

5. Résoudre l'équation précédente sur \mathbb{R} .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[258]

Exercice 7 ★★★★★ De drôles de conditions initiales –

1. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables et telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(x) = f(0) + f(1).$$

2. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables et telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(x) = \int_0^1 f(t) dt.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[263]

2 Résolution d'équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Exercice 8 ★ Équations du second ordre à coefficients constants - sans second membre –

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 2y' - 3y = 0$.
2. $y'' - 2y' + y = 0$.
3. $y'' - 2y' + 5y = 0$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3136]

Exercice 9 ★ Équations du second ordre à coefficients constants - second membre polynômial –

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 3y' + 2y = 1$;
2. $y'' - 2y' + y = x, y(0) = y'(0) = 0$;
3. $y'' + 9y = x + 1, y(0) = 0$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[666]

Exercice 10 ★★★★★ Équations du second ordre à coefficients constants - second membre exponentiel –

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - y = e^{2x} - e^x$;
2. $y'' + y' + y = \cos(x)$;
3. $y'' - 2y' + y = \sin^2 x$;
4. $y'' + y' + y = e^x \cos(x)$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3159]

Exercice 11 ★★★★★ Équations du second ordre à coefficients constants - second membre exponentiel*polynôme –

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^{-x}$;
2. $y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^x$;
3. $y'' - 2y' + y = (x^2 + 1)e^x + e^{3x}$;
4. $y'' - 4y' + 3y = x^2e^x + xe^{2x}\cos x$;
5. $y'' - 2y' + 5y = -4e^{-x}\cos(x) + 7e^{-x}\sin x - 4e^x\sin(2x)$;

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[240]

Exercice 12 ★ Problème inverse –

Déterminer une équation différentielle vérifiée par la famille de fonctions

$$y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[239]

3 D'autres équations différentielles

Exercice 13 ★★★★★ Le plus facile des systèmes différentiels –

Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique suivant l'axe (Oz) est régi par un système différentiel de la forme

$$\begin{cases} x'' &= \omega y' \\ y'' &= -\omega x' \\ z'' &= 0 \end{cases}$$

où ω dépend de la masse et de la charge de la particule, ainsi que du champ magnétique. En posant $u = x' + iy'$, résoudre ce système différentiel.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[264]

Exercice 14 ★★★★★ Un système différentiel qui se ramène à une équation du second ordre –

Déterminer les fonctions $y, z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables et qui vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} y' - y &= z \\ z' + z &= 3y \end{cases}$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3158]

Exercice 15 ★★ Changement de variables –

On cherche à résoudre sur \mathbb{R}_+^* l'équation différentielle :

$$x^2y'' + 3xy' + 4y = 0. \quad (E)$$

1. Cette équation est-elle linéaire ? Qu'est-ce qui change par rapport au cours ?

2. Analyse. Soit y une solution de (E) sur \mathbb{R}_+^* . Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $z(t) = y(e^t)$.

Calculer pour $t \in \mathbb{R}$, $z'(t)$ et $z''(t)$. En déduire que z vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants que l'on précisera (on pourra poser $x = e^t$ dans (E)). Résoudre l'équation différentielle trouvée à la question précédente. En déduire le "portrait robot" de y .

3. Calculer pour $t \in \mathbb{R}$, $z'(t)$ et $z''(t)$.

4. En déduire que z vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants que l'on précisera (on pourra poser $x = e^t$ dans (E)).

5. Résoudre l'équation différentielle trouvée à la question précédente.

6. En déduire le "portrait robot" de y .

7. Synthèse. Vérifier que, réciproquement, les fonctions trouvées à la fin de l'analyse sont bien toutes les solutions de (E) et conclure.

Exercice 16 ★★★ **Changement de fonction inconnue - et on retrouve des coefficients constants... –**

Résoudre sur \mathbb{R} les équations différentielles suivantes :

1. $(1 + e^x)y'' + 2e^xy' + (2e^x + 1)y = xe^x$ en posant $z(x) = (1 + e^x)y(x)$;
2. $xy'' + 2(x + 1)y' + (x + 2)y = 0$, en posant $z = xy$.

Indication ▼ Correction ▼

[241]

Exercice 17 ★★ **Résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 3. –**

Soit (E_1) l'équation différentielle $y^{(3)} = y$.

1. Soit f une solution à valeurs complexes de (E_1) . On pose $g = f + f' + f''$. Déterminer une équation différentielle (E_2) du premier ordre vérifiée par g .
2. Résoudre (E_2) .
3. Résoudre (E_1) .

Indication ▼ Correction ▼

[2668]

Exercice 18 ★★ **Presqu'une équation différentielle –**

Déterminer les fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) + f(-x) = e^x.$$

Indication ▼ Correction ▼

[252]

4 Applications

Exercice 19 ★ **Taux d'alcoolémie –**

Le taux d'alcoolémie $f(t)$ (en $\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$) d'une personne ayant absorbé, à jeun, une certaine quantité d'alcool vérifie l'équation différentielle $y'(t) + y(t) = ae^{-t}$, où $t \geq 0$ est le temps écoulé après l'ingestion (exprimé en heures) et a est une constante qui dépend de la quantité d'alcool ingérée et de la personne.

1. Exprimer f en fonction de t et de a .
2. On fixe $a = 5$. Étudier les variations de f et tracer sa courbe. Déterminer le taux d'alcoolémie maximal et le temps au bout duquel il est atteint.
3. Donner une valeur du délai T (à l'heure près par excès) au bout duquel le taux d'alcoolémie de cette personne est inférieur à $0,5 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$.

Indication ▼ Correction ▼

[3134]

Exercice 20 ★★ **Loi de Newton –**

La variation de la température θ d'un liquide, laissé dans un environnement à une température ambiante constante, suit la loi de Newton :

$$\theta'(t) = \lambda(\theta_a - \theta(t)), \quad (1)$$

où θ_a est la température ambiante, λ est une constante de proportionnalité qui dépend des conditions expérimentales et t est le temps, donné en minutes.

1. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle en fonction des paramètres λ et θ_a .
2. Un verre d'eau, à 10C, est sorti du réfrigérateur et déposé sur une table dans une pièce où il fait 31C. Après 10 minutes, l'eau dans le verre est à 17C. Quel est le temps après la sortie du réfrigérateur pour que l'eau soit à 25C ?

Indication ▼ Correction ▼

[3135]

Exercice 21 ★★ Recherche de courbes –

Trouver les courbes d'équation $y = f(x)$, avec f de classe C^1 sur l'intervalle $]0, +\infty[$ vérifiant la propriété géométrique suivante : si M est un point quelconque de la courbe, T l'intersection de la tangente à la courbe en M avec l'axe (Ox) , et P le projeté orthogonal de M sur (Ox) , alors O est le milieu de $[PT]$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[269]

Exercice 22 ★★ Le vecteur sous-tangent –

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que f' ne s'annule pas. Soit M un point de la courbe représentative C_f de f dans le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . On note T le point d'intersection de la tangente à C_f au point M avec l'axe (O, \vec{i}) et P le projeté orthogonal de M sur l'axe (O, \vec{i}) . On appelle vecteur sous-tangent à C_f en M le vecteur \overrightarrow{TP} . Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (dérivables, et dont la dérivée ne s'annule pas) dont les vecteurs sous-tangents en tout point de C_f sont égaux à un vecteur constant.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[270]

Exercice 23 ★★★ Une équation fonctionnelle –

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables et vérifiant, pour tous $s, t \in \mathbb{R}$,

$$f(s+t) = f(s)f(t).$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[271]

Exercice 24 ★ La remorque –

On souhaite étudier la suspension d'une remorque. Le centre d'inertie G de la remorque se déplace sur un axe vertical (Ox) dirigé vers le bas (unité : le mètre); il est repéré par son abscisse $x(t)$ en fonction du temps t exprimé en secondes. On suppose que cette remorque à vide peut être assimilée à une masse M reposant sans frottement sur un ressort.

L'abscisse $x(t)$ est alors, à tout instant t , solution de l'équation

$$Mx''(t) + kx(t) = 0, \quad (2)$$

où k désigne la raideur du ressort. On prendra $M = 250 \text{ kg}$ et $k = 6250 \text{ N.m}^{-1}$.

1. Déterminer la solution de l'équation différentielle vérifiant les deux conditions initiales $x(0) = 0 \text{ m}$ et $x'(0) = -0,1 \text{ m.s}^{-1}$.

2. Préciser la période de cette solution.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3137]

Exercice 25 ★ Ressort –

Un objet de masse m est fixé à un ressort horizontal immergé dans un fluide (caractérisé par sa constante de raideur k et un coefficient d'amortissement c). On note $x(t)$ la position (horizontale) de l'objet par rapport à la position d'équilibre en fonction du temps t .

L'équation différentielle satisfaite par la fonction $x(t)$ est alors

$$mx'' + cx' + kx = 0.$$

On considère ici que $m = 2$, $c = 2$ et $k = 5$.

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle.

2. On suppose qu'au temps $t = 0$ on a $x(0) = 2$ et $x'(0) = 3\sqrt{3} - 1$.

3. Quelle est la limite de $x(t)$ quand $t \rightarrow +\infty$?

4. Déterminer le plus petit temps $t_0 > 0$ tel que $x(t_0) = 0$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3138]

5 Quelques études qualitatives

Exercice 26 ★★ Tangentes aux courbes intégrales –

Soit l'équation $y' = a(x)y + b(x)$, avec $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues, et soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que les tangentes au point d'abscisse x_0 aux courbes représentatives des solutions de cette équation sont ou bien parallèles ou bien concourantes.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[276]

Exercice 27 ★★ Toucher mais pas traverser ! –

Déterminer la (les) valeurs de y_0 pour que la courbe représentative de la solution de l'équation différentielle

$$y' - 3y = 1 - \frac{1}{x}, \quad y(1) = y_0$$

touche en un point l'axe des abscisses sans le traverser.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2610]

Exercice 28 ★★★★★ Solutions impaires –

Soit $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues avec a impaire et b paire. Montrer que l'équation différentielle

$$(E) \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

admet une unique solution impaire.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[284]

Exercice 29 ★★ Solutions bornées –

Déterminer tous les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que toute solution de $y'' + ay' + by = 0$ soit bornée.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[279]

Indication pour l'exercice 1 ▲

Commencer par chercher toutes les solutions, puis ajuster la constante !

Indication pour l'exercice 2 ▲

On cherche d'abord la solution générale de l'équation sans second membre. Puis on cherche une solution particulière :

1. sous la forme d'un polynôme ;
 2. sous la forme d'un polynôme ;
 3. sous la forme d'une exponentielle polynôme, $y(x) = P(x)e^{-x}$;
 4. sous la forme d'une exponentielle polynôme, en utilisant le principe de superposition des solutions, et aussi le fait que $\Re(e^{ix}) = \cos x$.
-

Indication pour l'exercice 3 ▲

Pour chaque équation, résoudre l'équation homogène, rechercher une solution particulière "évidente" puis le théorème du cours.

Indication pour l'exercice 4 ▲

Comme le titre de l'exercice l'indique, on résout d'abord l'équation sans second membre, puis on cherche une solution par la méthode de variation de la constante.

Indication pour l'exercice 5 ▲

Exprimer C en fonction de x et de la fonction, et dériver.

Indication pour l'exercice 6 ▲

1. Chercher la limite à droite et à gauche en 0. Vérifier la dérivabilité à droite et à gauche en 0.
 2. Chercher la limite à droite et à gauche en 0.
 3. Vérifier la dérivabilité à droite et à gauche en 0.
 - 4.
 5. Si y est solution sur \mathbb{R} , elle est solution sur $]0, +\infty[$ et sur $] -\infty, 0[$. On doit recoller les bouts par continuité (et même dérivabilité) en 0.
-

Indication pour l'exercice 7 ▲

Commencer par résoudre l'équation différentielle, en remplaçant $f(0) + f(1)$ ou $\int_0^1 f(t)dt$ par une constante. Ensuite, adapter les constantes pour que l'équation soit résolue.

Indication pour l'exercice 8 ▲

Indication pour l'exercice 9 ▲

On commence par résoudre l'équation homogène. Pour résoudre l'équation avec second membre, on pourra chercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme.

Indication pour l'exercice 10 ▲

Indication pour l'exercice 11 ▲

Résoudre l'équation homogène en introduisant l'équation caractéristique. Puis chercher une solution particulière en utilisant le principe de superposition des solutions, puis en cherchant des solutions sous la forme d'une exponentielle-polynôme.

Indication pour l'exercice 12 ▲

Quelle équation du second ordre admet cette famille de solutions ?

Indication pour l'exercice 13 ▲

Indication pour l'exercice 14 ▲

Dans la deuxième équation, remplacer z et z' par leur valeur en fonction de y , y' et y'' donnée par la première expression. Puis résoudre l'équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par y , y' et y'' .

Indication pour l'exercice 15 ▲

- 1.
 2. Dérivée d'une fonction composée. Exprimer $y'(e^t)$ et $y'''(e^t)$ en fonction de $z'(e^t)$ et de $z''(e^t)$, et remplacer dans (E) (où on a déjà remplacé x par e^t). Relire son cours ! On revient à y par $y(x) = z(\ln t)$.
 3. Dérivée d'une fonction composée.
 4. Exprimer $y'(e^t)$ et $y'''(e^t)$ en fonction de $z'(e^t)$ et de $z''(e^t)$, et remplacer dans (E) (où on a déjà remplacé x par e^t).
 5. Relire son cours !
 6. On revient à y par $y(x) = z(\ln t)$.
 - 7.
-

Indication pour l'exercice 16 ▲

Dans chaque cas, z vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2. Trouver z et en déduire y . Pour la deuxième équation, attention aux problèmes de raccordement de solution.

Indication pour l'exercice 17 ▲

- 1.
 - 2.
 3. Attention à ne pas oublier la réciproque.
-

Indication pour l'exercice 18 ▲

Dériver à nouveau pour se ramener à une équation différentielle du second ordre.

Indication pour l'exercice 19 ▲

1. Résoudre l'équation différentielle. Pour ajuster la constante, il faut bien lire l'énoncé et remarquer que le taux d'alcoolémie au temps initial est nul !
 - 2.
 3. L'inéquation que l'on trouve ne se résout pas de façon exacte, mais comme on cherche une solution à l'heure près, il suffit de tracer la courbe ou d'utiliser un tableur.
-

Indication pour l'exercice 20 ▲

- 1.
 2. Commencer par calculer C (à l'aide de la température initiale), puis λ (à l'aide de la température après 10 minutes), puis répondre à la question.
-

Indication pour l'exercice 21 ▲

Écrire l'équation de la tangente, trouver les coordonnées du point T , du point P et en déduire une équation différentielle vérifiée par f .

Indication pour l'exercice 22 ▲

Prendre un point $M = (t, f(t))$ sur la courbe et calculer les coordonnées de T et de P .

Indication pour l'exercice 23 ▲

Dériver la relation précédente par rapport à t .

Indication pour l'exercice 24 ▲

Indication pour l'exercice 25 ▲

- 1.
 - 2.
 - 3.
 4. Écrire la somme du sinus et du cosinus comme un seul cosinus.
-

Indication pour l'exercice 26 ▲

L'équation de la tangente à la courbe intégrale passant par $(x_0, y(x_0))$ est $y - y(x_0) = (a(x_0)y(x_0) + b(x_0))(x - x_0)$. Il faut montrer que ces droites sont toutes parallèles ou concourantes, lorsque $y(x_0)$ décrit \mathbb{R} .

Indication pour l'exercice 27 ▲

Procéder par analyse/synthèse et commencer par déterminer le point où la courbe peut toucher l'axe des abscisses.

Indication pour l'exercice 28 ▲

Que vaut une fonction impaire en 0 ? Penser ensuite à l'existence et à l'unicité au problème de Cauchy.

Indication pour l'exercice 29 ▲

Discuter suivant le signe du discriminant de l'équation caractéristique.

Correction de l'exercice 1 ▲

1. On résout l'équation homogène $y' + 2y = 0$ dont les solutions sont les fonctions $t \mapsto Ce^{-2t}$, $C \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière et on remarque que la fonction constante $y(t) = -2$ est solution. Les solutions de l'équation sont donc les fonctions $y(t) = -2 + Ce^{-2t}$. On a ensuite $y(1) = -3 \iff -2 + Ce^{-2} = -3 \iff C = -e^2$. Finalement, la seule solution du problème considéré est $y(t) = -e^{2-2t} - 2$.

2. On résout l'équation homogène $2y' - 3y = 0$ dont les solutions sont les fonctions $t \mapsto Ce^{\frac{3}{2}t}$. On cherche une solution particulière et on remarque que la fonction constante $y(t) = -3$ est solution. Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions $y(t) = -3 + Ce^{\frac{3}{2}t}$. On a ensuite $y(-1) = 1 \iff -3 + Ce^{-\frac{3}{2}} = 1 \iff C = 4e^{\frac{3}{2}}$. Finalement, la seule solution du problème considéré est $y(t) = 4e^{\frac{3}{2}(1+t)} - 3$.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. On résout d'abord l'équation sans second membre $7y' + 2y = 0$. La solution générale est de la forme $y(x) = Ke^{-2x/7}$. On cherche ensuite une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 3. Si $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$, alors P est une solution de l'équation si et seulement si

$$7(3ax^2 + 2bx + c) + 2(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

soit

$$2ax^3 + (21a + 2b)x^2 + (14b + 2c)x + (7c + 2d) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Par identification, on trouve que a, b, c et d sont solutions du système

$$\begin{cases} 2a &= 2 \\ 21a + 2b &= -5 \\ 14b + 2c &= 4 \\ 7c + 2d &= -1 \end{cases}$$

On résout ce système et on trouve qu'une solution particulière est donné par $x^3 - 13x^2 + 93x - 326$. L'ensemble des solutions de l'équation est donnée par les fonctions

$$x \mapsto x^3 - 13x^2 + 93x - 326 + Ke^{-2x/7} \text{ avec } K \in \mathbb{R}.$$

2. On résout l'équation sans second membre $y' + 2y = 0$ dont la solution générale est λe^{-2x} . On cherche ensuite une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 2, $y(x) = ax^2 + bx + c$. On a alors

$$y'(x) + 2y(x) = 2ax^2 + (2a + 2b)x + (b + 2c)$$

et donc y est solution de l'équation différentielle avec second membre si et seulement si (a, b, c) est solution du système

$$\begin{cases} 2a &= 1 \\ 2a + 2b &= -2 \\ b + 2c &= 3 \end{cases} \iff \begin{cases} a &= 1/2 \\ b &= -3/2 \\ c &= 9/4 \end{cases}$$

On trouve donc qu'une solution particulière est donnée par $\frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$. Les solutions de l'équation sont donc les fonctions

$$x \mapsto \lambda e^{-2x} + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

3. On résout d'abord l'équation sans second membre $y' + y = 0$ qui donne $y(x) = Ke^{-x}$ avec $K \in \mathbb{R}$. On cherche ensuite une solution de l'équation complète sous la forme $y(x) = P(x)e^{-x}$, avec P un polynôme. Puisque dans ce cas $y'(x) = P'(x)e^{-x} - P(x)e^{-x}$, on trouve que y est solution de l'équation si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P'(x)e^{-x} - P(x)e^{-x} + P(x)e^{-x} = xe^{-x},$$

c'est-à-dire si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P'(x)e^{-x} = xe^{-x} \iff P'(x) = x.$$

Le polynôme $P(x) = x^2/2$ convient, et une solution particulière de l'équation complète est donc $\frac{x^2}{2}e^{-x}$. Les solutions de l'équation sont donc les fonctions

$$x \mapsto \left(\frac{1}{2}x^2 + K\right)e^{-x}, \text{ avec } K \in \mathbb{R}.$$

4. La solution générale de l'équation sans second membre est $y(x) = Ke^{2x}$, $K \in \mathbb{R}$. Il y a ensuite plusieurs méthodes pour rechercher une solution particulière. Par exemple, on peut chercher une solution particulière de l'équation $y' - 2y = \cos x$. Pour cela, on écrit que $\cos x = \Re(e^{ix})$ et on cherche une solution de $y' - 2y = e^{ix}$. Puisque e^{ix} n'est pas solution de l'équation sans second membre, on cherche une solution particulière sous la forme $y(x) = \alpha e^{ix}$. Cette fonction est solution de $y' - 2y = e^{ix}$ si et seulement si

$$i\alpha e^{ix} - 2\alpha e^{ix} = e^{ix}$$

ie si et seulement si

$$\alpha = \frac{1}{-2+i} = \frac{-2-i}{(-2+i)(-2-i)} = -\frac{2+i}{5}.$$

Une solution particulière de $y' - 2y = \cos x$ est donc donnée par

$$\Re\left(-\frac{2+i}{5}e^{ix}\right) = -\frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x.$$

On cherche ensuite une solution particulière de $y' - 2y = 2\sin x$ en utilisant exactement la même méthode, mais en remarquant que cette fois $\sin x = \Im(e^{ix})$. Une solution particulière est donc donnée par

$$2\Im\left(-\frac{2+i}{5}e^{ix}\right) = -\frac{4}{5}\sin x - \frac{2}{5}\cos x.$$

Par le principe de superposition des solutions, on trouve finalement que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est donnée par les fonctions

$$x \mapsto Ke^{2x} - \frac{4}{5}\cos x - \frac{3}{5}\sin x, \text{ avec } K \in \mathbb{R}.$$

Correction de l'exercice 3 ▲

1. On commence par résoudre l'équation homogène $y' + x^2y = 0$. Puisqu'une primitive de $x \mapsto x^2$ est $x \mapsto \frac{x^3}{3}$, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda e^{-\frac{x^3}{3}}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

On cherche ensuite une solution particulière. Ici, la fonction $y(x) = -1$ convient. Les solutions de l'équation $y' + x^2y = -x^2$ sont donc les fonctions

$$x \mapsto -1 + \lambda e^{-\frac{x^3}{3}}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. Comme on travaille sur \mathbb{R}_+^* , on divise par $2x$ et l'équation est équivalente à $y' - \frac{1}{2x}y = \frac{1}{2}$. On résout d'abord l'équation homogène $y' - \frac{1}{2x}y = 0$. Une primitive de $-\frac{1}{2x}$ est $-\frac{1}{2}\ln x = -\ln(\sqrt{x})$ et les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda e^{\ln(\sqrt{x})} = \lambda\sqrt{x}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

On cherche ensuite une solution évidente sous la forme $y(x) = \lambda x$ (pour que tous les termes soient des monômes de degré 1). En effet,

$$2xy'(x) - y(x) = 2\lambda x - \lambda x = \lambda x$$

et donc la fonction $y(x) = x$ est solution particulière de l'équation. Finalement, toutes les solutions de l'équation sont les fonctions qui s'écrivent

$$x \mapsto x + \lambda \sqrt{x}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

3. On commence par résoudre l'équation homogène $y' - \frac{x}{1+x^2}y = 0$. Une primitive de $x \mapsto \frac{-x}{1+x^2}$ est $x \mapsto -\frac{1}{2} \ln(1+x^2) = -\ln(\sqrt{1+x^2})$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions

$$x \mapsto \lambda e^{\ln(\sqrt{1+x^2})} = \lambda \sqrt{1+x^2}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

On cherche ensuite une solution particulière et il est très facile de voir que la fonction $y(x) = x$ en est une. Finalement, on trouve que les solutions de l'équation différentielle $y' - \frac{x}{1+x^2}y = \frac{1}{1+x^2}$ sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda \sqrt{1+x^2} + x, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Correction de l'exercice 4 ▲

Avant de commencer, on pourra consulter la vidéo suivante présentant la méthode de variation de la constante.

1. On commence par résoudre l'équation homogène $y' + y = 0$ dont la solution générale est $y(x) = \lambda e^{-x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière sous la forme $y(x) = \lambda(x)e^{-x}$, de sorte que $y'(x) = \lambda'(x)e^{-x} - \lambda(x)e^{-x}$. On introduit ceci dans l'équation différentielle et on trouve

$$\lambda'(x)e^{-x} - \lambda(x)e^{-x} + \lambda(x)e^{-x} = \frac{1}{1+e^x}.$$

Après simplification, ceci donne :

$$\lambda'(x)e^{-x} = \frac{1}{1+e^x} \implies \lambda'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}.$$

Une solution particulière est donc donné par $y(x) = \ln(1+e^x)e^{-x}$. Finalement, la solution générale de l'équation avec second membre est donnée par

$$x \mapsto \ln(1+e^x)e^{-x} + \lambda e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. On commence par résoudre l'équation homogène $(1+x)y' + y = 0$, dont la solution générale est donnée par $y(x) = \frac{\lambda}{1+x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière par la méthode de variation de la constante, en posant $y(x) = \frac{\lambda(x)}{1+x}$, de sorte que

$$y'(x) = \frac{\lambda'(x)}{1+x} - \frac{\lambda(x)}{(1+x)^2}.$$

En introduisant ceci dans l'équation différentielle, on trouve

$$(1+x) \left(\frac{\lambda'(x)}{1+x} - \frac{\lambda(x)}{(1+x)^2} \right) + \frac{\lambda(x)}{1+x} = 1 + \ln(1+x)$$

ce qui donne après simplifications

$$\lambda'(x) = 1 + \ln(1+x).$$

Une primitive est donnée par $\lambda(x) = (1+x) \ln(1+x)$, et la solution générale de l'équation avec second membre est donc donnée par

$$x \mapsto \frac{\lambda}{1+x} + \ln(1+x), \lambda \in \mathbb{R}.$$

3. On commence par résoudre l'équation sans second membre $y' - \frac{y}{x} = 0$. On remarque que $x \mapsto x$ est une solution. Les solutions de l'équation sans second membre sont donc les fonctions $x \mapsto \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche ensuite une solution particulière sous la forme $y(x) = \lambda(x)x$. Reportant dans l'équation différentielle, on trouve

l'équation $\lambda'(x) = x$, ce qui donne $\lambda(x) = \frac{x^2}{2} + C$. Puisqu'on cherchait les solutions s'écrivant $\lambda(x)x$, on obtient donc que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est donné par les fonctions

$$x \mapsto Cx + \frac{x^3}{2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

4. On commence par résoudre l'équation homogène $y' - 2xy = 0$. Pour chercher une solution, on peut remarquer que si y est une solution qui ne s'annule pas,

$$y' - 2xy = 0 \iff \frac{y'}{y} = 2x \iff \ln|y| = x^2 + C.$$

Ainsi, ceci nous conduit à observer que $x \mapsto e^{x^2}$ est solution de l'équation homogène et donc que la solution générale de l'équation homogène est $x \mapsto \lambda e^{x^2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche ensuite une solution particulière de l'équation en utilisant la méthode de variation de la constante. On pose donc $y(x) = \lambda(x)e^{x^2}$ et introduisant y dans l'équation avec second membre, on trouve

$$\lambda'(x)e^{x^2} = (-2x + 1)e^x \iff \lambda'(x) = (-2x + 1)e^{-x^2+x}.$$

Une primitive est donnée par $\lambda(x) = e^{-x^2+x}$ et donc une solution particulière de l'équation avec second membre est donnée par

$$x \mapsto e^{-x^2+x}e^{x^2} = e^x.$$

Finalement, les solutions de l'équation sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{x^2} + e^x$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

5. On commence par résoudre l'équation homogène $y' - \frac{2}{t}y = 0$. On trouve que les solutions sont les fonctions de la forme $y(t) = \lambda t^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière par la méthode de variation de la constante en posant $y(t) = \lambda(t)t^2$. L'équation devient :

$$t^2 = y'(t) - \frac{2}{t}y(t) = \lambda'(t)t^2.$$

Dès lors, $\lambda'(t) = 1$ soit $\lambda(t) = t + C$. Finalement, les solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation de départ sont les fonctions

$$t \mapsto t^3 + Ct^2, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Correction de l'exercice 5 ▲

On va procéder par analyse/synthèse. Pour cela, on écrit qu'une solution f s'écrit

$$f(x) = \frac{C+x}{1+x^2} \iff C = (1+x^2)f(x) - x.$$

Le but étant d'éliminer C , on dérive la relation précédente, et on trouve

$$0 = (1+x^2)f'(x) + 2xf(x) - 1.$$

C'est l'équation différentielle recherchée ! En effet, réciproquement, si l'on considère l'équation différentielle

$$(1+x^2)y'(x) + 2xy(x) - 1 = 0,$$

on prouve facilement que ses solutions sont les fonctions $x \mapsto \frac{C+x}{1+x^2}$.

Correction de l'exercice 6 ▲

1. Il est clair que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, indépendamment de la valeur de C , et que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \pm\infty$ si $D \neq 0$, et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ si $D = 0$. Ainsi, on a un prolongement continu en 0 si et seulement si $D = 0$. Dans ce cas,

on a $f(0) = 0$. On suppose donc que $D = 0$. La fonction f étant identiquement nulle à gauche de 0, elle est dérivable à gauche en 0 et sa dérivée est nulle. Pour $x > 0$, on a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{C}{x} \exp(-1/x).$$

Posons $u = \frac{1}{x}$. Lorsque x tend vers 0^+ , u tend vers $+\infty$ et

$$\frac{1}{x} \exp(-1/x) = u \exp(-u).$$

Par comparaison des fonctions polynômes et exponentielle, on en déduit que $\frac{f(x) - f(0)}{x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0^+ , et donc f' est dérivable à droite en 0, de dérivée nulle. Ainsi, on a bien que f est dérivable en 0, avec $f'(0) = 0$. La continuité à gauche de f' en 0 ne pose alors pas de problèmes. En ce qui concerne la dérivée à droite, on remarque que, pour $x > 0$, on a

$$f'(x) = \frac{C}{x^2} \exp(-1/x) = Cu^2 \exp(-u)$$

toujours avec le même changement de variables. Comme précédemment, on en tire que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$, et donc que f' est continue en 0.

2. Il est clair que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, indépendamment de la valeur de C , et que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \pm\infty$ si $D \neq 0$, et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ si $D = 0$. Ainsi, on a un prolongement continu en 0 si et seulement si $D = 0$. Dans ce cas, on a $f(0) = 0$.

3. On suppose donc que $D = 0$. La fonction f étant identiquement nulle à gauche de 0, elle est dérivable à gauche en 0 et sa dérivée est nulle. Pour $x > 0$, on a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{C}{x} \exp(-1/x).$$

Posons $u = \frac{1}{x}$. Lorsque x tend vers 0^+ , u tend vers $+\infty$ et

$$\frac{1}{x} \exp(-1/x) = u \exp(-u).$$

Par comparaison des fonctions polynômes et exponentielle, on en déduit que $\frac{f(x) - f(0)}{x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0^+ , et donc f' est dérivable à droite en 0, de dérivée nulle. Ainsi, on a bien que f est dérivable en 0, avec $f'(0) = 0$. La continuité à gauche de f' en 0 ne pose alors pas de problèmes. En ce qui concerne la dérivée à droite, on remarque que, pour $x > 0$, on a

$$f'(x) = \frac{C}{x^2} \exp(-1/x) = Cu^2 \exp(-u)$$

toujours avec le même changement de variables. Comme précédemment, on en tire que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$, et donc que f' est continue en 0.

4. Sur l'intervalle $]0, +\infty[$, la fonction x^2 ne s'annule pas et l'équation est équivalente à

$$y' = \frac{1}{x^2} y.$$

Les solutions de cette équation sont les fonctions $y(x) = C \exp(-1/x)$, où $C \in \mathbb{R}$. La résolution sur l'intervalle $] -\infty, 0[$ donne exactement le même ensemble de solutions.

5. Soit y une solution sur \mathbb{R} . Sa restriction à $]0, +\infty[$ est solution sur $]0, +\infty[$, et donc il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x > 0$, $y(x) = C \exp(-1/x)$. La restriction de y à $] -\infty, 0[$ est aussi solution sur $] -\infty, 0[$, et donc il existe une constante $D \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x < 0$, $y(x) = D \exp(-1/x)$. Remarquons ici que C et D n'ont aucune raison d'être égaux. En effet, les résolutions sur $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ se font totalement indépendamment. D'ailleurs, le résultat des premières questions entraîne que, pour que y soit continue en 0, il est nécessaire que $D = 0$. Dans ce cas, la fonction y est de classe C^1 , et elle vérifie bien l'équation différentielle : c'est clair pour $x \neq 0$, et c'est aussi vrai en 0 par continuité de y et y' en 0.

Correction de l'exercice 7 ▲

1. Soit f une solution de l'équation. On sait qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que f est solution de $f' + f = C$. Les solutions de cette équation sont les fonctions $f : x \mapsto C + De^{-x}$. Mais on doit aussi avoir $f(0) + f(1) = C$, et donc

$$2C + D(1 + e^{-1}) = C \iff C = -D(1 + e^{-1}).$$

Ainsi, si f est solution de l'équation, il existe $D \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = -D(1 + e^{-1}) + De^{-x}.$$

Réciproquement, on vérifie facilement que ces fonctions sont bien solutions de l'équation de départ.

2. On applique le même raisonnement, mais cette fois on doit avoir

$$\int_0^1 f(t) dt = C,$$

c'est-à-dire

$$C + D(1 - e^{-1}) = C.$$

On doit donc avoir $D = 0$, et les seules solutions sont les fonctions constantes, puisque ces fonctions vérifient clairement l'équation de départ.

Correction de l'exercice 8 ▲

1. L'équation caractéristique de l'équation est $r^2 - 2r - 3 = 0$, dont les solutions sont $r = -1$ et $r = 3$. Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions $y(t) = K_1 e^{3t} + K_2 e^{-t}$, $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$.

2. L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = 0$, qui admet 1 comme racine double. Ainsi, les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions $y(t) = (K_1 + K_2 t)e^t$, $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$.

3. L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 5 = 0$. Son discriminant est -16 , et l'équation admet deux racines complexes conjuguées, $r_1 = 1 + 2i$ et $r_2 = 1 - 2i$. Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions $y(t) = (K_1 \cos(2t) + K_2 \sin(2t))e^t$, $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 9 ▲

1. L'équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = 0$, dont les solutions sont $r = 1$ et $r = 2$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions $x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{2x}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Il est ensuite facile de voir que la fonction constante $y = 1/2$ est solution de l'équation. Finalement, les solutions de l'équation sont les fonctions $x \mapsto \frac{1}{2} + \lambda e^x + \mu e^{2x}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

2. On commence par résoudre l'équation homogène $y'' - 2y' + y = 0$. Son équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = 0$, dont 1 est racine double. Les solutions générales de l'équation homogène sont donc les fonctions

$$x \mapsto \lambda e^x + \mu x e^x.$$

Comme 0 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on va chercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 1. Mais $y(x) = ax + b$ est solution de l'équation différentielle si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, -2a + ax + b = x \iff \forall x \in \mathbb{R}, (a - 1)x + (b - 2a) = 0.$$

Un polynôme réel étant identiquement nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, on en déduit que $a = 1$ et $b = 2$. Les solutions de l'équation sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto \lambda e^x + \mu x e^x + (x + 2).$$

Si on ajoute les conditions $y(0) = y'(0) = 0$, on obtient les équations

$$\lambda + 2 = 0 \text{ et } \lambda + \mu + 1 = 0,$$

soit $\lambda = -2$ et $\mu = 1$. La seule solution de l'équation est donc la fonction

$$x \mapsto (x-2)e^x + (x+2).$$

3. L'équation homogène $y'' + 9y = 0$ admet pour équation caractéristique associée $r^2 + 9 = 0$, dont les racines sont $3i$ et $-3i$. Les solutions réelles de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme $t \mapsto \cos(3x)$ et $t \mapsto \sin(3x)$. On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 1, et on trouve $x \mapsto \frac{x+1}{9}$. Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto A \cos(3x) + B \sin(3x) + \frac{x+1}{9}.$$

La condition $y(0) = 0$ entraîne $A = -1/9$.

Correction de l'exercice 10 ▲

1. L'équation caractéristique est $r^2 - 1 = 0$ dont les racines sont $r = 1$ et $r = -1$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions $x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-x}$. Cherchons d'abord une solution particulière de $y'' - y = e^{2x}$. Comme 2 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une telle solution sous la forme $y(x) = ae^{2x}$. Puisque $y''(x) = 4ae^{2x}$, on a $y'' - y = e^{2x}$ si et seulement si $4a - a = 1$ soit $a = \frac{1}{3}$. Cherchons maintenant une solution particulière à $y'' - y = -e^x$. Comme 1 est racine simple de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme $y(x) = axe^x$. Il vient $y'(x) = a(x+1)e^x$ et $y''(x) = a(x+2)e^x$. Ainsi, $y'' - y = -e^x$ si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(a(x+2) - ax)e^x = -e^x \iff a = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi, la fonction $x \mapsto -\frac{1}{2}xe^x$ est solution particulière de l'équation $y'' - y = -e^x$. Finalement, on a prouvé que les solutions de $y'' - y = e^{2x} - e^x$ sont les fonctions

$$x \mapsto \left(\lambda - \frac{x}{2}\right)e^x + \mu e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}.$$

2. L'équation caractéristique est $r^2 + r + 1 = 0$, de discriminant $\Delta = -3$. Les solutions de l'équation caractéristique sont donc les complexes conjugués $\frac{-1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions

$$x \mapsto \left(\lambda \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + \mu \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right)e^{-x/2}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

On cherche ensuite une solution particulière de l'équation $y'' + y' + y = \cos(x)$ sous la forme $y(x) = a \cos(x) + b \sin(x)$. Puisque $y'(x) = -a \sin(x) + b \cos(x)$ et que $y''(x) = -a \cos(x) - b \sin(x)$, on a

$$y''(x) + y'(x) + y(x) = -a \sin(x) + b \cos(x).$$

On voit que le choix $a = 0$ et $b = 1$ donne une solution particulière. Finalement, on a prouvé que les solutions de l'équation sont les fonctions

$$x \mapsto \sin(x) + \left(\lambda \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + \mu \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right)e^{-x/2}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

3. L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = 0$ dont 1 est racine double. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto (A + Bx)e^x, A, B \in \mathbb{R}.$$

Pour résoudre l'équation avec second membre, on linéarise $\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$. Par le principe de superposition des solutions, on cherche d'abord une solution particulière qui correspond à $1/2$. La fonction constante égale à $1/2$ convient. On cherche ensuite une solution particulière convenant à $\cos(2x)$ (il suffira ensuite de multiplier

par $-1/2$ pour trouver une solution convenant à $-\cos(2x)/2$. On cherche cette solution particulière sous la forme $y(x) = c \cos(2x) + d \sin(2x)$. On a alors

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = (-3c - 4d) \cos(2x) + (4c - 3d) \sin(2x).$$

On cherche donc c et d solutions du système

{

$$\begin{aligned} -3c - 4d &= 14c - 3d \\ 0 \end{aligned}$$

On trouve $c = -3/25$ et $d = -4/25$. Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions $x \mapsto (A + Bx)e^x + \frac{1}{2} + \frac{3}{50} \cos(2x) + \frac{2}{25} \sin(2x)$, $A, B \in \mathbb{R}$.

4. On a déjà résolu l'équation homogène dans une question précédente, et on a vu que ses solutions sont les fonctions

$$x \mapsto \left(\lambda \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + \mu \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) \right) e^{-x/2}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Pour chercher une solution particulière, on remarque que $e^x \cos(x) = \Re(e^{(1+i)x})$. On va donc chercher une solution particulière de l'équation $y'' + y' + y = e^{(1+i)x}$, et on va ensuite prendre la partie réelle de cette solution. Puisque $1 + i$ n'est pas racine du polynôme caractéristique, on va chercher une solution de cette équation sous la forme $y(x) = ae^{(1+i)x}$, de sorte que $y'(x) = a(1+i)e^{(1+i)x}$ et $y''(x) = a(1+i)^2 e^{(1+i)x} = 2aie^{(1+i)x}$. On a alors

$$y''(x) + y'(x) + y(x) = a(2 + 3i)e^{(1+i)x}$$

et donc on obtiendra une solution particulière pour

$$a = \frac{1}{2 + 3i} = \frac{2 - 3i}{13}.$$

Il reste à calculer la partie réelle de $\frac{2-3i}{13}e^{(1+i)x}$. Mais,

$$\begin{aligned} (2 - 3i)e^{(1+i)x} &= (2 - 3i)(\cos(x) + i \sin(x))e^x \\ &= (2 \cos x + 3 \sin x)e^x + i(-3 \cos(x) + 2 \sin(x))e^x. \end{aligned}$$

Finalement, une solution particulière est donnée par $x \mapsto \frac{2 \cos(x) + 3 \sin(x)}{13} e^x$ et les solutions de l'équation sont les fonctions

$$x \mapsto \frac{2 \cos(x) + 3 \sin(x)}{13} e^x + \left(\lambda \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + \mu \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) \right) e^{-x/2}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Correction de l'exercice 11 ▲

1. On commence par résoudre l'équation homogène $y'' - 4y' + 3y = 0$. Son équation caractéristique est $r^2 - 4r + 3 = 0$, dont les racines sont 1 et 3. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions $x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{3x}$. Comme -1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme $y(x) = (ax + b)e^{-x}$. En dérivant, on trouve

$$y'(x) = (-ax + (-b + a))e^{-x}, \quad y''(x) = (ax + (b - 2a))e^{-x}$$

et donc a et b sont solutions du système :

$$\begin{cases} 8a &= 2 \\ 8b - 6a &= 1 \end{cases}$$

On résout ce système, et on trouve qu'une solution particulière est donnée par $y_0(x) = \left(\frac{x}{4} + \frac{5}{16}\right)e^{-x}$. Finalement, les solutions de l'équation avec second membre sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \left(\frac{x}{4} + \frac{5}{16}\right)e^{-x} + \lambda e^x + \mu e^{3x}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2. L'équation homogène a déjà été résolue à la question précédente. Pour résoudre l'équation avec second membre, on remarque cette fois que 1 est racine simple de l'équation caractéristique. On cherche donc une solution particulière sous la forme $y(x) = (ax^2 + bx)e^x$ (on peut trouver un polynôme sans terme constant car la fonction $x \mapsto e^x$ est solution de l'équation homogène). On dérive pour trouver

$$y'(x) = (ax^2 + (2a+b)x + b)e^x \text{ et } y''(x) = (ax^2 + (4a+b)x + (2a+2b))e^x.$$

Par identification, a et b sont solutions du système

$$\begin{cases} -4a &= 2 \\ 2a - 2b &= 1 \end{cases}$$

On obtient comme solution $a = -1/2$ et $b = -1$. La solution générale de l'équation avec second membre est donc donnée par la formule

$$y \mapsto \left(\frac{-x^2}{2} - x\right)e^x + \lambda e^x + \mu e^{3x}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

3. On commence par résoudre l'équation homogène $y'' - 2y' + y = 0$. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 2r + 1 = 0$ qui admet 1 comme racine double. La solution générale de l'équation homogène est donc $(Ax + B)e^x$.

On cherche une solution particulière de l'équation générale en utilisant le principe de superposition des solutions. On commence donc à chercher une solution de $y'' - 2y' + y = (x^2 + 1)e^x$. On la cherche sous la forme d'une exponentielle polynôme $P(x)e^x$. Comme 1 est racine double de l'équation caractéristique, on sait qu'on va trouver une solution avec un polynôme P de degré inférieur ou égal à 4. Utilisant

$$y'(x) = (P'(x) + P(x))e^x \text{ et } y''(x) = (P''(x) + 2P'(x) + P(x))e^x,$$

on obtient

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = P''(x)e^x.$$

y est donc solution de l'équation si et seulement si $P'' = x^2 + 1$. On obtient donc une solution particulière sous la forme

$$\left(\frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2}\right)e^x.$$

On cherche maintenant une solution particulière de $y'' - 2y' + y = e^{3x}$. Cette fois, 3 n'est pas racine de l'équation caractéristique, et on peut chercher une solution particulière sous la forme $y(x) = \alpha e^{3x}$. On obtient, en introduisant dans l'équation

$$9\alpha - 6\alpha + \alpha = 1 \iff \alpha = \frac{1}{4}.$$

Les solutions de l'équation générale de départ sont donc les fonctions

$$x \mapsto \left(\frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2} + Ax + B\right)e^x + \frac{1}{4}e^{3x}.$$

4. On résout l'équation homogène $y'' - 4y' + 3y = 0$. On introduit l'équation caractéristique $r^2 - 4r + 3 = 0$. Ses racines sont 1 et 3. On en déduit que la solution générale de l'équation sans second membre est

$$x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{3x}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière en utilisant le principe de superposition des solutions. On cherche donc d'abord une solution de $y'' - 4y' + 3y = x^2 e^x$. Puisque 1 est solution de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme $y_1(x) = (ax^3 + bx^2 + cx)e^x$. En dérivant et en identifiant, on obtient le système

$$\begin{cases} -6a &= 1 \\ 6a - 4b &= 0 \\ 2b - 2c &= 0 \end{cases}$$

Une solution particulière est donc obtenue par

$$y_1(x) = -\left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\right)e^x.$$

On cherche ensuite une solution particulière de $y'' - 4y' + 3y = xe^{2x} \cos x$. On va en fait chercher une solution particulière de $y'' - 4y' + 3y = xe^{(2+i)x}$ et on en prendra la partie réelle. $2+i$ n'étant pas solution de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme $y_2(x) = (ax+b)e^{(2+i)x}$. Après dérivation et identification, on trouve le système

$$\begin{cases} -2a &= 1 \\ 2ia - 2b &= 0. \end{cases}$$

On trouve $y_2(x) = \left(-\frac{1}{2}x - \frac{i}{2}\right)e^{(2+i)x}$. Prenant la partie réelle, une solution particulière de $y'' - 4y' + 3y = xe^{2x} \cos x$ est obtenue par

$$x \mapsto \left(-\frac{x}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x\right)e^{2x}.$$

La solution générale de l'équation différentielle initiale est donc donnée par

$$x \mapsto -\left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\right)e^x + \left(-\frac{x}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x\right)e^{2x} + \lambda e^x + \mu e^{3x}.$$

5. L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 5 = 0$, dont les racines sont $1+2i$ et $1-2i$. La solution générale de l'équation homogène est donc donnée par

$$x \mapsto \lambda e^x \cos(2x) + \mu e^x \sin(2x),$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On cherche ensuite une solution particulière de l'équation

$$y'' - 2y' + 5y = -4e^{-x} \cos(x) + 7e^{-x} \sin(x).$$

On va plutôt résoudre $y'' - 2y' + 5y = e^{(-1+i)x}$, puis considérer les parties réelles et imaginaires. Comme $-1+i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une fonction de la forme $y_0(x) = ae^{(-1+i)x}$. On trouve, en dérivant et en utilisant l'équation

$$((-1+i)^2 - 2(-1+i) + 5)a = 1.$$

Il vient $a = 1/(7-4i) = (7+4i)/65$. Une solution particulière de $y'' - 2y' + 5y = -4e^{-x} \cos(x) + 7e^{-x} \sin(x)$ est alors donnée par

$$\begin{aligned} -4\Re\left(ae^{(-1+i)x}\right) + 7\Im\left(ae^{(-1+i)x}\right) &= -4\Im\left(iae^{(-1+i)x}\right) + 7\Im\left(ae^{(-1+i)x}\right) \\ &= \Im\left((-4i+7)ae^{(-1+i)x}\right) \\ &= \Im\left(e^{(-1+i)x}\right) \\ &= e^{-x} \sin x. \end{aligned}$$

On cherche ensuite une solution particulière de l'équation

$$y'' - 2y' + 5y = -4e^x \sin(2x).$$

On cherche de la même façon à résoudre $y'' - 2y' + 5y = -4e^{(1+2i)x}$. Comme $1+2i$ est solution de l'équation caractéristique, on va chercher une solution sous la forme $axe^{(1+2i)x}$, dont on prendra ensuite -4 fois la partie imaginaire. On trouve finalement que $xe^x \cos(2x)$ est solution de $y'' - 2y' + 5y = -4e^x \sin(2x)$. Finalement, les solutions de l'équation de départ sont les fonctions

$$x \mapsto xe^x \cos(2x) + e^{-x} \sin x + \lambda e^x \cos(2x) + \mu e^x \sin(2x), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Correction de l'exercice 12 ▲

On va chercher une équation différentielle linéaire du second ordre admettant exactement cette famille de solutions. Pour cela, il suffit de trouver une équation différentielle dont l'équation caractéristique admet 2 et -1 comme racine, c'est-à-dire que l'on souhaite qu'elle se factorise en $(r+1)(r-2) = r^2 - r - 2$. Une équation différentielle qui convient est donc

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

Correction de l'exercice 13 ▲

D'abord, l'équation $z'' = 0$ donne facilement $z(t) = at + b$, avec a et b des constantes. Ensuite, on a

$$u' = x'' + iy'' = \omega y' - i\omega x' = -i\omega u.$$

On en déduit que $u(t) = (c + id)e^{-i\omega t}$. En prenant les parties réelles et imaginaires, on trouve que

$$\begin{aligned}x'(t) &= c \cos(\omega t) + d \sin(\omega t) \\y'(t) &= d \cos(\omega t) - c \sin(\omega t).\end{aligned}$$

Il suffit d'intégrer une nouvelle fois pour trouver les valeurs de x et de y :

$$\begin{aligned}x(t) &= c' \sin(\omega t) - d' \cos(\omega t) + x_0 \\y(t) &= d' \sin(\omega t) + c' \cos(\omega t) + y_0\end{aligned}$$

où on a posé $c' = c/\omega$ et $d' = d/\omega$. Il s'agit d'un mouvement hélicoïdal.

Correction de l'exercice 14 ▲

On va raisonner par analyse/synthèse. Soit y, z des fonctions solutions de ce système. Alors on sait que $z = y' - y$ et donc que $z' = y'' - y'$. On peut donc reporter dans la deuxième équation et l'on trouve

$$y' - y + y'' - y' = 3y \iff y'' - 4y = 0.$$

Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions $y(x) = \lambda \exp(2x) + \mu \exp(-2x)$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On en déduit que

$$z(x) = y'(x) - y(x) = \lambda \exp(2x) - 3\mu \exp(-2x).$$

Réciproquement soit λ et μ deux réels et soit y, z les fonctions définies par

$$\begin{cases} y(x) &= \lambda \exp(2x) + \mu \exp(-2x) \\ z(x) &= \lambda \exp(2x) - 3\mu \exp(-2x). \end{cases}$$

On vérifie alors facilement que ces deux fonctions vérifient le système. Par exemple, on a

$$\begin{aligned}z'(x) + z(x) &= 3\lambda \exp(2x) + 3\mu \exp(-2x) \\ &= 3y(x).\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 15 ▲

1. Oui, il s'agit bien d'une équation linéaire, mais elle n'est pas à coefficients constants.
2. On doit dériver une fonction composée. On trouve

$$z'(t) = e^t y'(e^t) \text{ et } z''(t) = e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(e^t).$$

En posant, comme indiqué dans l'énoncé, $x = e^t$, (E) se réécrit :

$$e^{2t}y''(e^t) - 3e^t y'(e^t) + 4y(e^t) = 0.$$

On exprime ensuite $y'(e^t)$ et $y''(e^t)$ en fonction de $z'(t)$ et de $z''(t)$. On trouve :

$$y'(e^t) = e^{-t}z'(t) \text{ et } y''(e^t) = e^{-2t}z''(t) - e^{-t}y'(e^t) = e^{-2t}(z''(t) - z'(t)).$$

En introduisant cela dans (E), on obtient

$$z''(t) - z'(t) - 3z'(t) + 4z(t) = 0 \iff z''(t) - 4z'(t) + 4z(t) = 0.$$

Il s'agit maintenant d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. Son polynôme caractéristique est $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$, dont la seule solution est $\lambda = 2$. Ainsi, il existe deux constantes a et b telles que $z(t) = ae^{2t} + bte^{2t}$. On revient à y par $y(x) = z(\ln x)$ et $t = \ln x$. On trouve que si y est solution de l'équation, alors on a

$$y(x) = ax^2 + bx^2 \ln(x).$$

3. On doit dériver une fonction composée. On trouve

$$z'(t) = e^t y'(e^t) \text{ et } z''(t) = e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(e^t).$$

4. En posant, comme indiqué dans l'énoncé, $x = e^t$, (E) se réécrit :

$$e^{2t}y''(e^t) - 3e^t y'(e^t) + 4y(e^t) = 0.$$

On exprime ensuite $y'(e^t)$ et $y''(e^t)$ en fonction de $z'(t)$ et de $z''(t)$. On trouve :

$$y'(e^t) = e^{-t}z'(t) \text{ et } y''(e^t) = e^{-2t}z''(t) - e^{-t}y'(e^t) = e^{-2t}(z''(t) - z'(t)).$$

En introduisant cela dans (E), on obtient

$$z''(t) - z'(t) - 3z'(t) + 4z(t) = 0 \iff z''(t) - 4z'(t) + 4z(t) = 0.$$

5. Il s'agit maintenant d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. Son polynôme caractéristique est $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$, dont la seule solution est $\lambda = 2$. Ainsi, il existe deux constantes a et b telles que $z(t) = ae^{2t} + bte^{2t}$.

6. On revient à y par $y(x) = z(\ln x)$ et $t = \ln x$. On trouve que si y est solution de l'équation, alors on a

$$y(x) = ax^2 + bx^2 \ln(x).$$

7. On a montré que si y est solution de (E), alors il existe deux réels a, b tels que, pour tout $x > 0$, on a $y(x) = ax^2 + bx^2 \ln(x)$. Réciproquement, il est facile de vérifier que la fonction $x \mapsto ax^2 + bx^2 \ln x$ est solution de l'équation. On a donc trouvé toutes les solutions de l'équation.

Correction de l'exercice 16 ▲

1. z est deux fois dérivable et vérifie

$$z'(x) = (1 + e^x)y'(x) + e^x y(x), \quad z''(x) = (1 + e^x)y''(x) + 2e^x y'(x) + e^x y(x).$$

Il est facile de vérifier que y vérifie l'équation différentielle de départ si et seulement si z vérifie l'équation différentielle

$$z'' + z = xe^x.$$

Or, on a ici une équation différentielle à coefficients constants facile à résoudre, dont les solutions sont les fonctions $z(x) = A \cos x + B \sin x + \frac{x-1}{2}e^x$ avec $A, B \in \mathbb{R}$. Les fonctions y qui sont solutions de l'équation différentielle initiale sont donc les fonctions

$$y(x) = (1 + e^x)^{-1} \left(A \cos x + B \sin x + \frac{x-1}{2}e^x \right).$$

2. $z = xy$ est deux fois dérivable, et on a $z' = xy' + y$ et $z'' = xy'' + 2y'$. Ainsi, z vérifie l'équation

$$z'' + 2z' + z = 0.$$

L'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 1 = 0$ dont -1 est racine double. Ainsi, z vérifie $\lambda x e^{-x} + \mu e^{-x}$. On en déduit que les solutions de l'équation initiale sur $]0, +\infty[$ ou sur $] -\infty, 0[$ sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu \frac{e^{-x}}{x}.$$

Soit maintenant y une solution sur \mathbb{R} . Alors, il existe des constantes $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2 \in \mathbb{R}$ telles que

$$y(x) = \begin{cases} \lambda_1 e^{-x} + \mu_1 \frac{e^{-x}}{x} & \text{si } x > 0 \\ \lambda_2 e^{-x} + \mu_2 \frac{e^{-x}}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Pour que y admette une limite en 0, il est nécessaire que $\mu_1 = \mu_2 = 0$, puis que $\lambda_1 = \lambda_2$ pour que les limites à droite et à gauche coïncident. Ainsi, puisque $x \mapsto e^{-x}$ est de classe C^2 sur \mathbb{R} et solution de l'équation, les solutions sur \mathbb{R} de l'équation sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda e^{-x}.$$

Correction de l'exercice 17 ▲

1. La fonction g vérifie $g' = f' + f'' + f^{(3)} = f' + f'' + f = g$.

2. On en déduit que $g(x) = Ae^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. Si f est solution de l'équation différentielle $y^{(3)} = y$, alors d'après la question précédente, f est aussi solution de l'équation $f'' + f' + f = Ae^x$, pour $A > 0$. L'équation caractéristique de cette équation différentielle est $r^2 + r + 1 = 0$, de discriminant $\Delta = -3$, donc les racines sont $(-1 - i\sqrt{3})/2$ et $(-1 + i\sqrt{3})/2$. Les solutions de l'équation $f'' + f' + f = 0$ sont donc les fonctions de la forme $Be^{(-1+i\sqrt{3})x/2} + Ce^{(-1-i\sqrt{3})x/2}$. De plus, une solution particulière de l'équation $f'' + f' + f = Ae^x$ est $Ae^x/3$. Quitte à remplacer A par $3A$, on a prouvé que si f est une solution de l'équation $y^{(3)} = y$, alors il existe trois constantes A, B, C telles que

$$f(x) = Ae^x + Be^{(-1+i\sqrt{3})x/2} + Ce^{(-1-i\sqrt{3})x/2}.$$

Comme on a raisonné simplement par implication, il reste à prouver que ces fonctions sont effectivement solution. Mais si f est donné par la forme précédente, alors

$$f^{(3)}(x) = Ae^x + B \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \right)^3 e^{(-1+i\sqrt{3})x/2} + C \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \right)^3 e^{(-1-i\sqrt{3})x/2}.$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que

$$\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = e^{\pm i2\pi/3},$$

de sorte que leur cube est égal à 1.

Correction de l'exercice 18 ▲

Soit f une solution de cette équation. Alors, on a pour tout réel x , $f'(x) = e^x - f(-x)$. Ainsi, la fonction f' est de classe C^1 et donc f est de classe C^2 . Dérivant cette équation, on trouve

$$f''(x) - f'(-x) = e^x.$$

Or, $f'(-x) = e^{-x} - f(x)$, et donc l'équation devient

$$f''(x) + f(x) = e^x + e^{-x}.$$

On résoud alors cette équation différentielle linéaire du second ordre. Les solutions de l'équation sans second membre sont les fonctions $x \mapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Une solution particulière est donnée par la fonction cosh. Ainsi, si f est solution de l'équation initiale, on sait qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x + \cosh(x).$$

Ici, il faut prendre garde au fait que l'on n'a pas procédé par équivalence. En effet, on a dérivé l'équation, et rien ne dit que toute solution de l'équation différentielle du second ordre est une solution de l'équation initiale. On doit vérifier pour quelles valeurs de λ et μ c'est effectivement le cas. On a :

$$f'(x) = -\lambda \sin x + \mu \cos x + \sinh x$$

et on doit donc avoir, pour tout réel x

$$(-\lambda - \mu) \sin x + (\mu + \lambda) \cos x + e^x = e^x.$$

Si on fait $x = 0$, on trouve que $\mu = -\lambda$. Et réciproquement, toute fonction $x \mapsto \lambda(\cos x - \sin x) + \cosh x$, $\lambda \in \mathbb{R}$, est solution de l'équation.

Correction de l'exercice 19 ▲

1. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $y(t) = Ce^{-t}$ avec $C \in \mathbb{R}$. Pour rechercher une solution particulière, on peut par exemple utiliser la méthode de variation de la constante en posant $y(t) = C(t)e^{-t}$. On a alors

$$y'(t) + y(t) = ae^{-t} \iff C'(t)e^{-t} = ae^{-t} \iff C'(t) = a.$$

On en déduit que la fonction $y(t) = ate^{-t}$ est une solution particulière de l'équation et donc le taux d'alcoolémie vérifie $f(t) = (at + C)e^{-t}$ avec $C \in \mathbb{R}$. Puisque $f(0) = 0$ (au temps $t = 0$, la personne est à jeun), on conclut que $C = 0$ et finalement que $f(t) = ate^{-t}$.

2. On a $f'(t) = 5(1-t)e^{-t}$ et donc $f'(t) \geq 0$ sur $[0, 1]$ et $f'(t) \leq 0$ sur $[1, +\infty[$. La fonction f est croissante sur $[0, 1]$, atteint son maximum en $t = 1$, puis est décroissante sur $[1, +\infty[$. De plus, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$ par croissance comparée des polynômes et de la fonction exponentielle. Le taux d'alcoolémie maximal est $f(1) = 5e^{-1} \simeq 1,84$.

3. On doit chercher $t \geq 1$ tel que $f(t) \leq 0,5$ c'est-à-dire $5te^{-t} \leq 0,5$. On ne sait pas résoudre exactement (par une formule algébrique) cette inéquation, mais comme on se contente d'avoir une valeur approchée à l'unité près, une lecture graphique est suffisante. La figure précédente montre qu'il faut attendre 4h pour que le taux d'alcoolémie redevienne inférieur à $0,5 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$.

Correction de l'exercice 20 ▲

1. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $\theta(t) = Ce^{-\lambda t}$ avec $C \in \mathbb{R}$. Comme la fonction constante $\theta(t) = \theta_a$ est clairement une solution de l'équation (ce qui est "physiquement" logique), les solutions de l'équation sont les fonctions $\theta(t) = Ce^{-\lambda t} + \theta_a$.

2. On va commencer par déterminer C , puis λ . On sait que $\theta(0) = 10$ et que $\theta_a = 31$. On a donc $C + 31 = 10$ et donc $C = -21$. On sait ensuite que $\theta(10) = 17$, ce qui donne

$$17 = -21e^{-10\lambda} + 31 \iff e^{-10\lambda} = \frac{-14}{-21} = \frac{2}{3} \iff -\lambda = \frac{1}{10} \ln(2/3).$$

Enfin, on cherche t_0 tel que $\theta(t_0) = 25$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} -21e^{-\lambda t} + 31 &= 25 \iff e^{-\lambda t} = \frac{-6}{-21} = \frac{2}{7} \\ &\iff -\lambda t = \ln(2/7) \\ &\iff t = \frac{\ln(2/7)}{-\lambda} = \frac{10 \ln(2/7)}{\ln(2/3)} \simeq 30,9. \end{aligned}$$

Il faudra environ 30,9 minutes pour que le liquide soit à 25C.

Correction de l'exercice 21 ▲

Supposons qu'une telle courbe existe. Soit $M(a, f(a))$ un point de la courbe. La tangente en M a pour équation $y - f(a) = f'(a)(x - a)$. Pour que cette tangente coupe l'axe des abscisses, il est nécessaire que $f'(a) \neq 0$. L'abscisse de T est alors $a - f(a)/f'(a)$. Pour que O soit le milieu de $[PT]$, il est nécessaire et suffisant que $0 = a - f(a)/f'(a) + a$. f est donc solution de l'équation différentielle

$$2af'(a) = f(a).$$

On résout cette équation différentielle, et on trouve que ses solutions sont les fonctions $f(x) = C\sqrt{x}$, $C \in \mathbb{R}$. Pour que f ne soit pas la fonction nulle (sinon la dérivée s'annule toujours), on doit aussi demander $C \neq 0$. Réciproquement, soit $f(x) = C\sqrt{x}$ avec $C \neq 0$. Si $M(a, C\sqrt{a})$ est un point de la courbe, la tangente en M a pour équation $y - C\sqrt{a} = \frac{C}{2\sqrt{a}}(x - a)$, et elle coupe l'axe des abscisses en le point d'abscisse

$$a - \frac{C\sqrt{a}}{\frac{C}{2\sqrt{a}}} = a - 2a = -a.$$

O est bien le milieu de $T(-a, 0)$ et de $P(a, 0)$.

Correction de l'exercice 22 ▲

Soit $M = (t, f(t))$ un point de C_f . Le point P a pour coordonnées $(t, 0)$. La tangente à C_f en M a pour équation

$$y - f(t) = f'(t)(x - t).$$

L'intersection de la tangente avec l'axe (O, \vec{i}) a pour coordonnées $(a, 0)$ où a vérifie

$$-f(t) = f'(t)(a - t) \iff a = t - \frac{f(t)}{f'(t)}.$$

Le vecteur \overrightarrow{TP} a donc pour coordonnées $\left(\frac{f(t)}{f'(t)}, 0\right)$. On cherche les fonctions f pour lesquelles ce vecteur est constant, c'est-à-dire pour lesquelles il existe $k \in \mathbb{R}$ de sorte que $\frac{f(t)}{f'(t)} = k$. k ne peut pas être nul, sinon la fonction f serait identiquement nulle et sa dérivée aussi. Posons $\lambda = 1/k$. Alors on cherche les fonctions f solutions de l'équation différentielle $f' - \lambda f = 0$. Ces fonctions sont de la forme $f(t) = Ce^{\lambda t}$ avec $C \neq 0$ pour la même raison que ci-dessus. On a donc prouvé que les fonctions solutions sont à rechercher parmi les fonctions $f(t) = Ce^{\lambda t}$ avec $C, \lambda \in \mathbb{R}^*$. Réciproquement, on vérifie facilement que ces fonctions sont solutions (il ne faut pas oublier de traiter la réciproque, ou alors il faut faire très attention de raisonner plus haut par équivalence).

Correction de l'exercice 23 ▲

Faisant $s = t = 0$, on remarque que $f(0)^2 = f(0)$, et donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. Si $f(0) = 0$, faisant $s = 0$, on trouve que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$f(t) = f(0)f(t) = 0.$$

On peut donc supposer $f(0) = 1$. On repart alors de la relation initiale, on fixe la variable s à une valeur quelconque de \mathbb{R} , et on dérive par rapport à t . On obtient

$$f'(s+t) = f(s)f'(t).$$

On évalue en $t = 0$, et on trouve

$$f'(s) = f(s)f'(0).$$

Ainsi, f est solution d'une équation différentielle $y' = \alpha y$. On en déduit que f est de la forme $f(x) = Ce^{\alpha x}$. Pour que $f(0) = 1$, il est nécessaire que $C = 1$. Réciproquement, on vérifie aisément que la fonction nulle et les fonctions $x \mapsto e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, sont bien solutions de l'équation fonctionnelle.

Correction de l'exercice 24 ▲

1. L'équation caractéristique est $Mr^2 + k = 0$ dont les solutions sont $r = \pm i\sqrt{\frac{k}{M}} = \pm 5i$. Les solutions de l'équation différentielle s'écrivent donc

$$x(t) = K_1 \cos(5t) + K_2 \sin(5t).$$

La condition $x(0) = 0$ nous donne $K_1 = 0$. De plus, puisque $x'(0) = -0,1$ et que $x'(t) = 5K_2 \cos(5t)$, on a $5K_2 = -0,1$ et donc $K_2 = -0,02$. Ainsi, $x(t) = -0,02 \sin(5t)$.

2. Cette fonction est $\frac{2\pi}{5}$ -périodique. En effet, on vérifie facilement que $x(t + \frac{2\pi}{5}) = x(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 25 ▲

1. L'équation caractéristique est $2r^2 + 2r + 5 = 0$ dont le discriminant est $\Delta = -36 = (6i)^2$. Les solutions de cette équation sont $\frac{-1}{2} \pm \frac{3}{2}i$. Ainsi, les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions

$$x(t) = \left(K_1 \sin\left(\frac{3}{2}t\right) + K_2 \cos\left(\frac{3}{2}t\right) \right) e^{-t/2}$$

avec $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$.

2. La condition $x(0) = 2$ donne $K_2 = 2$. Calculons ensuite $x'(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \left(\frac{3}{2}K_1 \cos\left(\frac{3}{2}t\right) - 3 \sin\left(\frac{3}{2}t\right) \right) e^{-t/2} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(K_1 \sin\left(\frac{3}{2}t\right) + 2 \cos\left(\frac{3}{2}t\right) \right) e^{-t/2}. \end{aligned}$$

La condition $x'(0) = 3\sqrt{3} - 1$ donne

$$\frac{3}{2}K_1 - 1 = 3\sqrt{3} - 1 \implies K_1 = 2\sqrt{3}.$$

On a donc

$$x(t) = 2 \left(\sqrt{3} \sin\left(\frac{3}{2}t\right) + \cos\left(\frac{3}{2}t\right) \right) e^{-t/2}.$$

Ceci peut écrire sous la forme suivante, en utilisant juste un cosinus et un décalage d'angle :

$$\begin{aligned} x(t) &= 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{3}{2}t\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{3}{2}t\right) \right) e^{-t/2} \\ &= 4 \cos\left(\frac{3t}{2} - \frac{\pi}{3}\right) e^{-t/2}. \end{aligned}$$

3. La fonction x est produit d'une fonction bornée et d'une fonction qui tend vers 0 en $+\infty$: elle tend donc vers 0 en $+\infty$.

4. On cherche le plus petit réel $t > 0$ tel que $\cos\left(\frac{3t}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = 0$. Or,

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{3t}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = 0 &\iff \frac{3t}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\iff \frac{3t}{2} = \frac{5\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\iff t = \frac{5\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Le plus petit temps t_0 tel que $x(t_0) = 0$ est donc $t_0 = \frac{5\pi}{9}$.

Correction de l'exercice 26 ▲

Soit y une solution de l'équation. Sa tangente au point d'abscisse x_0 a pour équation

$$y - y(x_0) = (a(x_0)y(x_0) + b(x_0))(x - x_0).$$

Par tout point (x_0, λ) il passe une courbe intégrale (ou encore il y a une unique solution avec $y(x_0) = \lambda$), et il s'agit de démontrer que toutes les droites de la famille $(D_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$, où (D_λ) est la droite d'équation

$$y - \lambda = (a(x_0)\lambda + b(x_0))(x - x_0)$$

sont parallèles ou concourantes. Si $a(x_0) = 0$, il est clair qu'elles sont parallèles, et parallèles à $y = b(x_0)x$. Sinon, cherchons le point d'intersection, pour $\lambda \neq \mu$, de D_λ et D_μ . On doit résoudre le système

$$\begin{cases} y - \lambda &= (a(x_0)\lambda + b(x_0))(x - x_0) \\ y - \mu &= (a(x_0)\mu + b(x_0))(x - x_0) \end{cases}$$

On trouve que le point d'intersection a pour coordonnées $\left(x_0 - \frac{1}{a(x_0)}, \frac{-b(x_0)}{a(x_0)}\right)$. Il ne dépend pas de λ ni de μ . Toutes les droites D_λ passent par ce point !

Correction de l'exercice 27 ▲

Remarquons d'abord que nous sommes dans les conditions d'application du théorème de Cauchy linéaire et donc qu'il existe bien une unique solution au problème définie sur $]0, +\infty[$. Nous allons procéder par analyse/synthèse. Analyse : soit y une telle solution, et $(a, 0)$ un point où la courbe représentative de y touche l'axe des abscisses sans le traverser. On a donc $y(a) = 0$. Puisque la courbe représentative de y ne traverse pas l'axe des abscisses, c'est que y admet un extrémum local en a et donc on a aussi $y'(a) = 0$. Mais alors, puisque y est solution de l'équation, on sait que $1 - \frac{1}{a} = 0$, et donc que $a = 1$. Ainsi, s'il existe une solution au problème, on a $y(1) = 0$. Synthèse : Considérons y la fonction définie sur $]0, +\infty[$ et vérifiant $y' - 3y = 1 - \frac{1}{x}$ et $y(1) = 0$. On sait aussi que $y'(1) = 0$. De plus, dérivant l'équation différentielle, $y'' - 3y = \frac{1}{x^2}$, et donc $y''(1) = 1 > 0$. Ainsi, y admet un minimum local strict en 1. Ainsi, la courbe représentative de y touche l'axe des abscisses en $(1, 0)$, sans le traverser. Remarquons que notre raisonnement ne démontre pas que la courbe représentative de y ne coupe pas l'axe des abscisses en un autre point.

Correction de l'exercice 28 ▲

Il y a deux clés pour résoudre cet exercice :

toute fonction impaire vaut 0 en 0; l'équation différentielle (E) admet une unique solution y_0 vérifiant $y_0(0) = 0$.

Ceci montre déjà l'unicité : s'il y a une fonction y impaire solution de (E) , elle vérifie $y(0) = 0$ et doit donc être égale à y_0 . Réciproquement, on doit prouver que y_0 est impaire. On va poser $z(t) = -y_0(-t)$. z est solution de (E) . En effet,

$$z'(t) + a(t)z(t) = y_0'(-t) - a(t)y_0(-t) = y_0'(-t) + a(-t)y_0(-t) = b(-t) = b(t),$$

car y_0 est solution de (E) , a est impaire et b est paire. z est donc solution de (E) , et satisfait de plus $z(0) = 0$. Ainsi, par unicité au problème de Cauchy, z est égale à y_0 , et donc y_0 est impaire. On pouvait aussi prouver que y_0 est impaire, en cherchant à résoudre l'équation différentielle par la méthode usuelle (solution de l'équation homogène à l'aide de l'exponentielle et d'une primitive de a , puis méthode de variation de la constante).

Correction de l'exercice 29 ▲

L'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ a pour discriminant $\Delta = a^2 - 4b$. On distingue alors les trois cas :

Si $\Delta > 0$, les solutions sont de la forme $x \mapsto C_1 \exp(\lambda_1 x) + C_2 \exp(\lambda_2 x)$, avec λ_1, λ_2 des réels distincts. L'un des deux, disons λ_1 , est non-nul. La solution $x \mapsto \exp(\lambda_1 x)$ n'est jamais bornée. Si $\Delta = 0$, alors les solutions sont de la forme $x \mapsto (C_1 x + C_2) \exp(\lambda x)$ avec λ un réel. Dans tous les cas (même si $\lambda = 0$), la solution $x \mapsto x \exp(\lambda x)$ n'est pas bornée. Si $\Delta < 0$, alors posons $\delta > 0$ tel que $\delta^2 = -\Delta$. Les racines de l'équation caractéristique sont $\frac{-a \pm i\delta}{2}$ et les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme $x \mapsto C_1 \sin(\delta x/2) \exp(-ax/2) +$

$C_2 \cos(\delta x/2) \exp(-ax/2)$. Or, les fonctions $x \mapsto \sin(\delta x/2) \exp(-ax/2)$ et $x \mapsto \cos(\delta x/2) \exp(-ax/2)$ sont bornées si et seulement si $a = 0$.

Ainsi, en résumant, toutes les solutions de $y'' + ay' + by = 0$ sont bornées si et seulement si $\Delta < 0$ et $a = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $a = 0$ et $b > 0$. En physique, cela correspond à l'équation différentielle obtenue pour un oscillateur harmonique.
